ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 21, Nos. 2–3, 1975

UNE CLASSE DE SYSTEMES POUR LESQUELS LA CONJECTURE DE PINSKER EST VRAIE

PAR

JEAN-PAUL THOUVENOT[†]

ABSTRACT

In this paper it is proved that any factor of a dynamical system which is isomorphic to the direct product of a Bernoulli shift by a zero entropy system splits in the same way.

Introduction

Soit (X, T) un système dynamique ergodique d'entropie finie. On dit qu'il possède la propriété de Pinsker s'il existe deux partitions finies de X, P et H, telles que

(1) $(H)_T \vee (P)_T = X$ (Par $(H)_T$ on désigne la σ-algèbre $\vee_{-\infty}^{\infty} T^i H$)

(2) $(H)_T \perp (P)_T$

(3) $E(H, T) = 0$

(4) Le facteur engendré par P est un K-système.

Si au lieu de (4) on a la propriété

(4') Les $T^i P$ $i \in Z$ sont indépendantes,

on dit que (X, T) possède la propriété de Pinsker forte.

D. S. Ornstein a donné dans [2] un exemple d'un système dynamique mélangeant qui ne possède pas la propriété de Pinsker.

Nous allons prouver que tout facteur d'un système dynamique possédant la propriété de Pinsker forte possède à son tour la propriété de Pinsker forte, répondant ainsi à une question qui nous a été posée par P. C. Shields. (Voir aussi [3] p. 108.)

Il serait intéressant de savoir si cette propriété est stable aussi pour l'opération de "passage à l'induit". On ne sait pas non plus si un système dont

[†] Equipe de Recherche n° 1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la Section n° 1 "Mathématiques, Informatique" associée au C.N.R.S.

Received June 9, 1974

tous les facteurs d'entropie complèment positive sont des schémas de Bernoulli possède la propriété de Pinsker forte.

Nous donnons dans le lemme, qui suit, un résultat qui est, — dans un cas extrêmement particulier — une réponse à la question A de [4].

LEMME 1. *Soit (X, T) un système dynamique ergodique, P et H deux partitions finies de X telles que*

(1) *P est H-conditionnellement finiment déterminée, (pour la définition voir* [4])

(2) $$(P)_T \overset{(P)_T \wedge (H)_T}{\perp} (H)_T.$$

Soit R une partition finie génératrice de $(P)_T \wedge (H)_T$. Alors P est R-conditionnellement finiment déterminée.

DÉMONSTRATION. On veut prouver que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n et δ tels que si $\bar{P}$ et $\bar{R}$ sont des partitions d'un système dynamique ergodique $(\bar{X}, \bar{T})$ vérifiant

(1) $(\bar{R}, \bar{T}) \sim (R, T)$

(2) $d(\vee_0^n T^i(P \vee R), \quad \vee_0^n \bar{T}^i(\bar{P} \vee \bar{R})) < \delta$

(3) $|E(P \vee R, T) - E(\bar{P} \vee \bar{R}, \bar{T})| < \delta,$

il existe Z et pour tout entier $p > 0$, des suites de partitions de Z, P_i, R_i, $\bar{P}_i$ $0 \leqq i \leqq p$, telles que

(4) $d(\vee_0^p T^i(P \vee R)) = d(\vee_0^p (P_i \vee R_i))$

(5) $d(\vee_0^p \bar{T}^i(\bar{P} \vee \bar{R})) = d(\vee_0^p (\bar{P}_i \vee R_i))$

(6) $|P_i - \bar{P}_i| < \varepsilon.$

La donnée de $(\bar{X}, \bar{T})$ et de $\bar{R}$ vérifiant (1) nous permet de construire un système dynamique ergodique[†] (Y', T') et P' et H' deux partitions de Y' telles que

(7) $(H', T') \sim (H, T)$ (Soit R' l'image de R dans cet isomorphisme)

(8) $(\bar{P} \vee \bar{R}, \bar{T}) \sim (P' \vee R', T')$

(9) $(P')_{T'} \perp^{(R')_{T'}} (H')_{T'}$

i.e. si $p'_{i_0} \cdots p'_{i_k}\ h'_{i_0} \cdots h'_{i_k}$ est un cyclindre de $\vee_0^k T'^i(P' \vee H')$ ce cylindre a comme mesure

$$m(p'_{i_0} \cdots p'_{i_k} h'_{i_0} \cdots h'_{i_k}) = E(E^{(R')T'} 1_{p'_{i_0}} \cdots 1_{p'_{i_k}} E^{(R')} 1^{T'}_{h'_{i_0}} \cdots 1_{h'_{i_k}})$$

(la construction de (Y', T') résulte immédiatement de cette dernière formule).

[†] En fait dans le cas général ce système n'est pas nécessairement ergodique. Seulement l'examen de la démonstration de la proposition 3 de [4] prouve qu'on peut se limiter au cas où $(\bar{P} \vee \bar{R}, \bar{T}) \sim (P^* \vee R, T)$ où P^* est une partition de $(B \vee R)_T$ où B est une partition génératrice d'un schéma de Bernoulli et où $(B)_T \perp (R)_T$. Dans ce cas l'ergodicité de $(P' \vee H')_{T'}$, est facile à prouver.

Comme P est H-conditionnellement finiment déterminée il existe n_1 et δ_1 tels que si:

(10) $d(\vee_0^{n_1} T^i(P \vee H), \quad \vee_0^{n_1} T'^i(P' \vee H')) < \delta_1$

(11) $|E(P \vee H, T) - E(P' \vee H', T')| < \delta_1$

alors il existe Z et pour tout $p > 0$, des suites de partitions de Z, P_i, P'_i, H_i, $0 \leqq i \leqq p$ telles que

(12) $d(\vee_0^p T^i(P \vee H)) = d(\vee_0^p (P_i \vee H_i))$

(13) $d(\vee_0^p T'^i(P' \vee H')) = d(\vee_0^p (P'_i \vee H_i))$

(14) $|P_i - P'_i| < \varepsilon$.

(On a utilisé (7)).

(15) Si $|E(\bar{P} \vee \bar{R}, \bar{T}) - E(P \vee R, T)| < \delta_1$ alors
$|E(P' \vee H', T') - E(P \vee H, T)| < \delta_1$.

En effet, $E(P' \vee H', T') = E(P' \vee H' \vee R', T')$
$= E(R', T') + E(P', T' \mid (R')_{T'}) + E(H', T \mid (R')_{T'})$
(d'après la formule de Pinsker et (9)).

On a le même résultat pour $(P \vee H, T)$ et par conséquent

$$|E(P' \vee H', T') - E(P \vee H, T)| = |E(P', T' \mid (R')_{T'}) - E(P, T \mid (R)_T))|$$

(on a utilisé (7)).

(8) et une nouvelle application de la formule de Pinsker donnent que la différence précédente est égale à

$$|E(\bar{P} \vee \bar{R}, \bar{T}) - E(P \vee R, T)|. \text{ D'où (15).}$$

(16) On choisit n tel que

$$\left| E \bigvee_{-n/2}^{n/2} T^i R \; 1_{h_{i0}} \cdots 1_{h_{i_{n_1}}} - R^{(R)_T} \; 1_{h_{i0}} \cdots 1_{h_{i_{n_1}}} \right| < \frac{\delta_1}{8k^{n_1}}$$

sauf sur un ensemble de mesure plus petite $\delta_1/8k^{n_1}$ pour tous les cylindres

$$h_{i_0} \cdots h_{i_{n_1}} \text{ de } \bigvee_0^{n_1} T^i H.$$

(k désigne le nombre d'éléments de la partition H).

(17) δ_2 est maintenant choisi de façon que:

$$d\left(\bigvee_{-n/2}^{-n/2} \bar{T}^i(\bar{P} \vee \bar{R}), \bigvee_{-n/2}^{n/2} T^i(P \vee R)\right) < \delta_2 \text{ entraîne}$$

$$d\left(\bigvee_0^{n_1} T'^i(P' \vee H'), \bigvee_0^{n_1} T^i(P \vee H)\right) < \delta_1.$$

Ce qui est possible puisque

$$\left| E\left(E^{(R')_{T'}} 1_{p'_{i_0}} \cdots 1_{p'_{i_{n_1}}} E^{(R')_{T'}} 1_{h'_{i_0}} \cdots 1_{h'_{i_{n_1}}}\right) - E\left(E^{(R')_{T'}} 1_{p'_{i_0}} \cdots 1_{p'_{i_{n_1}}} E^{\vee_{-n/2}^{n/2} T'^i R'} 1_{h'_{i_0}} \cdots 1_{h'_{i_{n_1}}}\right) \right| < \frac{\delta_1}{4k^{n_1}}$$

pour tous les cylindres de $\vee_0^{n_1} T'^i(P' \vee H')$. (D'après (16), (9) et (7).)
Et comme

$$E\left(E^{(R')_{T'}} 1_{p'_{i_0}} \cdots 1_{p'_{i_{n_1}}} E^{\vee_{-n/2}^{n/2} T'^i R'} 1_{h'_{i_0}} \cdots 1_{h'_{i_{n_1}}}\right) = E\left(E^{\vee_{-n/2}^{n/2} T'^i R'} 1_{p'_{i_0}} \cdots 1_{p'_{i_{n_1}}} E^{\vee_{-n/2}^{n/2} T'^i R'} 1_{h'_{i_0}} \cdots 1_{h'_{i_{n_1}}}\right)$$

(8) assure l'existence de δ_2. Si on choisit n donné en (16) et $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$, alors les conditions (10) et 11) sont vérifiées et les conclusions (12) (13) (14) entraînent (4), (5) et (6). (On peut supposer que $H \supset R$, au besoin en changeant H en $H \vee R$.)

Définition. Soit (X, T) un système dynamique ergodique et H une partition génératrice d'une facteur $(H)_T$.

On dit que ce système est un K-système conditionnel par rapport à $(H)_T$ si pour toute partition P les conditions

(1) $(P)_T \supset (H)_T$ (2) $E(P, T) = E(H, T)$ entraînent qu'alors

(3) $(P)_T = (H)_T$.

On remarque que tout système dynamique est un K-système conditionnel par rapport à sa tribu de Pinsker.

Lemme 2. *Soit P une partition génératrice finie de (X, T) qui est un K-système conditionnel par rapport à $(H)_T$.*

Alors

$$\bigwedge_{n>0} (T^{-n}P^- \vee (H)_T) = (H)_T$$

(P^- désigne la tribu $\vee_{-1}^{-\infty} T^i P$).

DÉMONSTRATION. Soit Q une partition génératrice du facteur $\bigvee_{n \geqq 0}(T^{-n}P^{-} \vee (H)_T)$.

Alors $$E(P \vee H \vee Q, T) = E(P \vee H, T)$$
$$= E(P \vee H | P^{-} \vee H^{-})$$
$$= E(H \vee Q, T) + E(P \vee H, T | (H \vee Q)_T)$$
$$= E(H \vee Q | H^{-} \vee Q^{-}) + E(P \vee H | P^{-} \vee (H)_T \vee (Q)_T).$$

Mais $(Q)_T \subset P^{-} \vee (H)_T$. Donc
$$E(P \vee H | P^{-} \vee H^{-}) = E(H \vee Q | H^{-} \vee Q^{-}) + E(P \vee H | P^{-} \vee (H)_T)$$
$$= E(H | H^{-}) + E(Q | Q^{-} \vee (H)_T) + E(P \vee H | P^{-} \vee (H)_T)$$
$$= E(P \vee H, T) + E(Q | Q^{-} \vee (H)_T).$$

Par conséquent $E(Q | Q^{-} \vee (H)_T) = 0$ et $E(Q \vee H, T) = E(H, T)$.

En fait, on peut montrer le résultat suivant quí établit un parallèlisme complet avec la théorie non conditionnelle.

LEMME 2'. *Soit (X, T) un système dynamique ergodique d'entropie finie et P une partition génératrice pour ce système; soit H une partition génératrice d'un facteur; Alors $\bigwedge_n(T^{-n}P^{-} \vee (H)_T)$ est un facteur qui a la même entropie que $(H)_T$. (C'est le lemme précédent.) Mais on a de plus que (X, T) est un K-système conditionnel par rapport à $\bigwedge_n(T^{-n}P^{-} \vee (H)_T)$.*

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce lemme car nous ne l'utiliserons pas dans la suite.

Le lemme qui suit est la version conditionnelle d'un lemme de K. Berg [1].

LEMME 3. *Soit (X, T) un système dynamique ergodique et P, Q, et R trois partitions finies de X telles que:*

(1) *$(Q)_T \supset (R)_T$ et le système $((Q)_T, T)$ est un K-système conditionnel par rapport à $(R)_T$*

(2) $E(P \vee Q, T | (R)_T) = E(P, T | (R)_T) + E(Q, T | (R)_T)$.

Alors on a:

(3) $(P)_T \perp^{(R)_T} (Q)_T$.

DÉMONSTRATION: (2) entraîne que $E(Q, T | (R)_T) = E(Q, T | (P)_T \vee (R)_T)$.

(On utilise l'égalité $E(P \vee Q, T | (R)_T) = E(P, T | (R)_T) + E(Q, T | (P_T) \vee (R_T))$ qui résulte de ce que:

$$\begin{aligned} E(R \vee P \vee Q, T) &= E(R, T) + E(P \vee Q, T|(R)_T) \\ &= E(R \vee P, T) + E(Q, T|(R \vee P)_T) \\ &= E(R, T) + E(P, T|(R)_T) + E(Q, T|(R \wedge P)_T)). \end{aligned}$$

On a donc

$$E(Q|Q^- \vee (R)_T) = E(Q|Q^- \vee (P)_T \vee (R)_T).$$

Pour tout N, pour tout $\gamma \subset \bigvee_{-N}^{N} T^i P$ on a:

$$E(\gamma|Q^- \vee (R)_T) = E(\gamma|Q \vee Q^- \vee (R)_T).$$

En effet

$$E(Q|Q^- \vee (R)_T) = E(Q|Q^- \vee (R)_T \vee \gamma)$$

et

$$\begin{aligned} E(\gamma \vee Q|Q^- \vee (R)_T) &= E(Q|Q^- \vee (R)_T) + E(\gamma|Q \vee Q^- \vee (R)_T) \\ &= E(\gamma|Q^- \vee (R)_T) + E(Q|Q^- \vee (R)_T \vee \gamma)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$E(\gamma|Q^- \vee (R)_T) = E(\gamma|(\bigwedge_{n>0} T^{-n}Q^- \vee (R)_T)).$$

L'hypothèse (1) et le Lemme (2) entraînent que:

$$E(\gamma|Q^- \vee (R)_T) = E(\gamma|(R)_T)$$

$$E(\gamma|(Q)_T \vee (R)_T) = E(\gamma|(R)_T).$$

Cette dernière égalité entraîne (3).

PROPOSITION. *Soit (X, T) un système dynamique d'entropie finie possédant la propriété de Pinsker forte. (I.e. il existe deux partitions finies de X, H et B telles que*

(1) $(H)_T \vee (B)_T = X$

(2) $(H)_T \perp (B)_T$

(3) $E(H, T) = 0$

(4) *Les $T^i B$ $i \in Z$ sont indépendantes.)*

Alors tous les facteurs de ce système possédent la propriété de Pinsker forte.

DÉMONSTRATION. Soit P une partition génératrice finie d'un facteur de (X, T). La proposition 4 de [4] nous dit que p est H conditionnellement finiment déterminée.

Soit R une partition génératrice de $(P)_T \wedge (H)_T \cdot (R)_T$ est le facteur de Pinsker de $(P)_T$ (évident).

Le système engendré par P est donc un K-système conditionnel par rapport à $(R)_T$. Mais maintenant

$$E(P \vee H, T)|(R)_T) = E(P \vee H, T) = E(P, T) + E(H, T)$$

$$= E(P, T)|(R)_T) + E(H, T|(R)_T),$$

puisque $E(P \vee R, T) = E(R, T) + E(P, T|(R)_T)$
et que $E(H, T) = E(R, T) = 0$.

Le Lemme 3 entraîne que $(P)_T \perp^{(R)_T} (H)_T$.

Le Lemme 1 entraîne que P est R conditionnellement finiment détérminé. La proposition 3 de [4] entraîne enfin qu'il existe $B_1 \subset (P)_T$ telle que $(B_1)_T \perp (R)_T$, $(B_1)_T \vee (R)_T = (P)_T$, les $T^i B_1$ $i \in Z$ sont indépendantes.

BIBLIOGRAPHIE

1. K. Berg, *Convolution of invariant measures. Maximal entropy*, Math. System Theory **3** (1969), 146–151.
2. D. S. Ornstein, *A mixing transformation for which Pinsker's conjecture fails*, Advances in Math. **10** (1973), 103–123.
3. P. C. Shields, *The theory of Bernoulli shifts*, Chicago Lectures in Mathematics, 1973.
4. J. P. Thouvenot, *Quelques propriétés des systèmes dynamiques qui se décomposent en un produit de deux systèmes dont l'un est un schéma de Bernoulli*, Israel J. Math. **20** (1975), 177–207.

LABORATOIRE DE PROBABILITÉS
UNIVERSITÉ DE PARIS VI—TOUR 56
4, PLACE JUSSIEU, 75230 PAEIS CEDEX 05
FRANCE